التمرين الأول : (12 نقطة)

☜ **الجزء الأول :** لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = e^{x} + 2x - e^{-x}$

1) أدرس تغيرات الدالة g.

2) أحسب $g(0)$ ثم استنتج اشارة $g(x)$ في المجموعة $\mathbb{R}$.

☜ **الجزء الثاني:**

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x - \dfrac{2x}{e^{x}+1}$

وليكن C_f تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\dfrac{2x}{e^{-x}+1} = 2x - \dfrac{2x}{e^{x}+1}$

2) بين أن الدالة f زوجية . ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني C_f .

3) أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

4) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x) = \dfrac{e^{x} \times g(x)}{(e^{x}+1)^{2}}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها

5) أ) بين ان المستقيم Δ ذي المعادلة $y = -x$ مقارب مائل للمنحني C_f عند $-\infty$ و المستقيم Δ' ذي المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحني C_f عند $+\infty$

ب) أدرس الوضع النسبي لـ C_f بالنسبة الى Δ ثم بالنسبة الى Δ' .

ج) أرسم المستقيمين Δ ، Δ' و C_f .

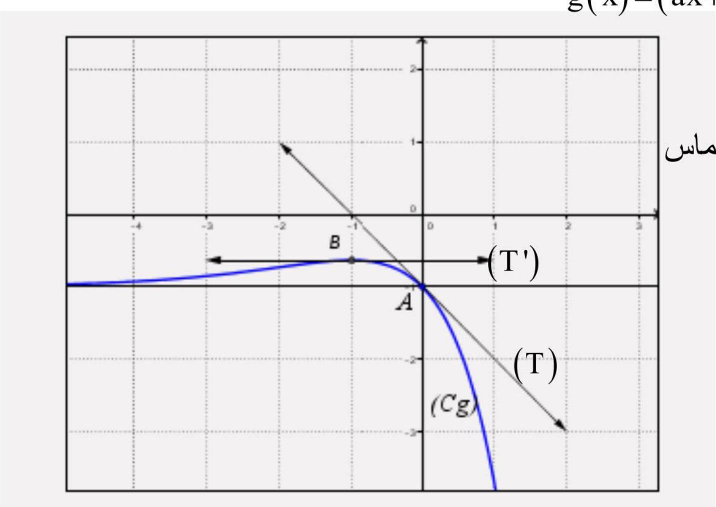
التمرين الثاني: (08 نقاط)

☜ نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=(ax+b)e^{x}+c$

حيث c,b,a أعداد حقيقية .

(C_g) تمثيلها البياني كما هو مبين في الشكل .

(T) المماس لـ (C_g) عند النقطة $A(0;-1)$ و (T') المماس لـ (C_g) عند النقطة $B(-1;e^{-1}-1)$



1- بقراءة بيانية عين : $g'(-1), g'(0), g(0)$.

2- أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T).

3- شكل جدول تغيرات الدالة g.

4- شكل جدول إشارة الدالة g .

5- باستعمال النتائج السابقة عين الأعداد الحقيقية b, a و c .

تصحيح الفرض الثاني الثلاثي الأول — المستوى : 3 ثانوي علوم تجريبية

التصحيح ـ الرجوع الى نص الفرض ـ اضغط هنا	التنقيط
التمرين الأول : نص التمرين	12 نقطة

الجزء الأول :

لدينا : $g(x)=e^{x}+2x-e^{-x}$ $\quad D_g=]-\infty;+\infty[$

1) دراسة تغيرات الدالة g :

ب) حساب النهايات : (0.5+0.5)

- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x}+2x-e^{-x}\right)=-\infty$ لأنَ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(2x)=-\infty\end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x}+2x-e^{-x}\right)=+\infty$ لأنَ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(2x)=+\infty\end{cases}$

ج) حساب المشتقة : (0.75)

- لدينا : $g'(x)=e^{x}+2-\left(-e^{-x}\right)=e^{x}+2+e^{-x}$ أي $g'(x)=e^{x}+2+e^{-x}$

- **دراسة إشارة المشتقة :** (0.75)

لدينا : $g'(x)=0$ يعني $e^{x}+2+e^{-x}=0$

أي $e^{x}+e^{-x}=-2$ (مستحيلة) لأنَ $e^{x}>0$ و $e^{-x}>0$

- جدول إشارة المشتقة :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$

ج) جدول تغيرات الدالة g : (0.75)

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2) حساب $g(0)$ واستنتاج إشارة $g(x)$: (0.25+0.5)

- لدينا : $g(0)=e^{0}+2(0)-e^{0}=1-1=0$
- استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

الجزء الثاني :

- لدينا : $f(x)=x-\dfrac{2x}{e^{x}+1}$ $\quad D_f=]-\infty;+\infty[$

1) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\dfrac{2x}{e^{-x}+1}=2x-\dfrac{2x}{e^{x}+1}$

• لدينا : $\frac{2x+2xe^x-2x}{e^x+1}=\frac{2xe^x}{1+e^x}=\frac{2x}{e^{-x}\left(1+\frac{1}{e^{-x}}\right)}=\frac{2x}{e^{-x}+1}$ ومنه $\frac{2x}{e^{-x}+1}=\frac{2x\left(1+e^x\right)-2x}{e^x+1}=2x-\frac{2x}{e^x+1}$ إذن $\frac{2x}{e^{-x}+1}=2x-\frac{2x}{e^x+1}$	01
2) تبيان أنّ الدالة f زوجية : • D_f متناظرة بالنسبة إلى 0 أي من أجل $x\in\mathbb{R}$ فإنّ $(-x)\in\mathbb{R}$ • ولدينا : $f(-x)=-x-\frac{-2x}{e^{-x}+1}=-x+\frac{2x}{e^{-x}+1}=-x+2x-\frac{2x}{e^x+1}=x-\frac{2x}{e^x+1}$ وبالتالي $f(-x)==x-\frac{2x}{e^x+1}=f(x)$ ومنه f دالة زوجية • نستنتج أنّ حامل محور التراتيب محور تناظر للمنحني (C_f)	01
3) حساب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$: • $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x-\frac{2x}{e^x+1}\right)=\lim_{x\to-\infty} x\left(1-\frac{2}{e^x+1}\right)=+\infty$ • $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{2x}{e^x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{x}{e^x}\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right)\right)=+\infty$ لأنّ $\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0\\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right)=2\end{cases}$	$0.5+0.5$
4) تبيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=\frac{e^x\times g(x)}{(e^x+1)^2}$: لدينا : $f'(x)=1-\frac{2(e^x+1)-2xe^x}{(e^x+1)^2}=\frac{(e^x+1)^2-2e^x-2+2xe^x}{(e^x+1)^2}$ أي $f'(x)=\frac{e^{2x}+2e^x+1-2e^x-2+2xe^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{2x}-1+2xe^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x\left(e^x-\frac{1}{e^x}+2x\right)}{(e^x+1)^2}$ ومنه $f'(x)=\frac{e^x\left(e^x-\frac{1}{e^x}+2x\right)}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x\left(e^x+2x-e^{-x}\right)}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x\times g(x)}{(e^x+1)^2}$ إذن $f'(x)=\frac{e^x\times g(x)}{(e^x+1)^2}$	01
• **استنتاج اتجاه تغير الدالة** f : - جدول إشارة المشتقة : إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$ <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ 0 $+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>$-$ 0 $+$</td></tr></table>	0.5

- **جدول تغيرات الدالة** f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	0	$\nearrow +\infty$

0.5

5) أ) تبيان أنَ المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=-x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $-\infty$:

- لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-x)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x-\frac{2x}{e^x+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x\left(e^x+1\right)-2x}{e^x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2xe^x+2x-2x}{e^x+1}$$

ومنه $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-x)\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2xe^x}{e^x+1}=0$ لأنَ $\begin{cases}\lim_{x\to-\infty}2xe^x=0\\ \lim_{x\to-\infty}\left(e^x+1\right)=1\end{cases}$

ومنه المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=-x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $-\infty$.

0.5

- **تبيان أنَ المستقيم (Δ') ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$:**

- لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{2x}{e^x+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\times\frac{-2}{1+\frac{1}{e^x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\times\frac{-2}{1+e^{-x}}=0$$

لأنَ $\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{1+e^{-x}}=-2\\ \lim_{x\to+\infty}\left(1+e^{-x}\right)=1\end{cases}$ ومنه (Δ') ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$

0.5

ب)دراسة الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

- ندرس إشارة الفرق $f(x)-(-x)=f(x)+x=\frac{2xe^x}{e^x+1}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)+x$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) فوق (Δ)

0.5

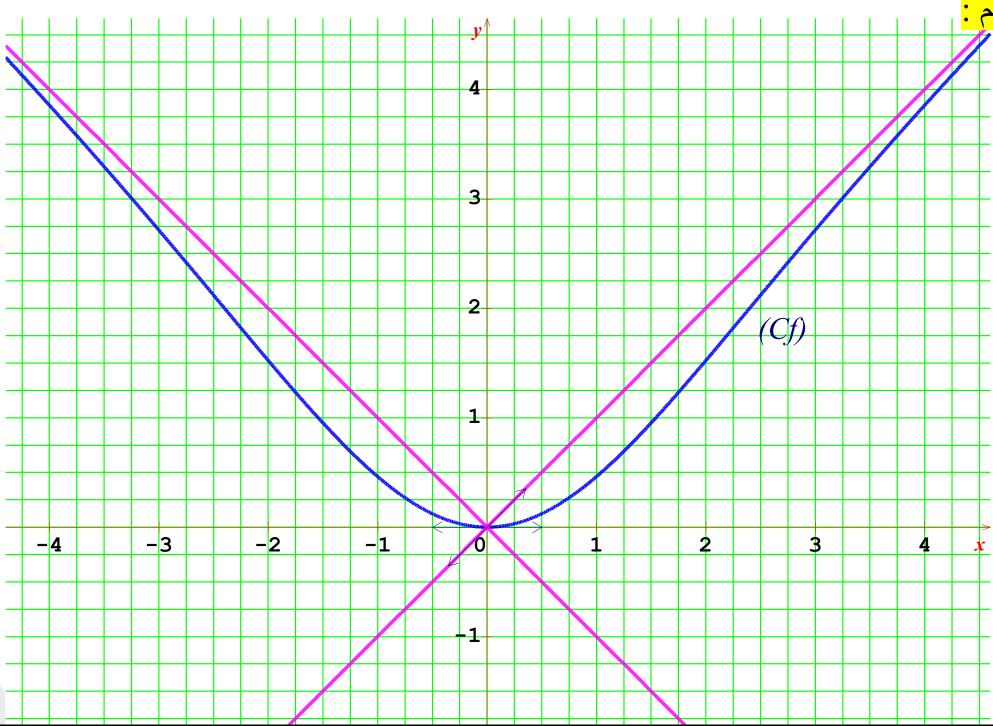
- **دراسة الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة إلى (Δ') :**

- ندرس إشارة الفرق $f(x)-x=-\dfrac{2x}{e^x+1}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-x$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ')	(C_f) يقطع (Δ')	(C_f) تحت (Δ')

0.5

ج) الرسم :



01

التمرين الثاني : الرجوع الى النص — 08 نقاط

لدينا : $g(x)=(ax+b)e^x+c$

1) تعيين $g'(-1),g'(0),g(0)$:

- $g(0)=-1$
- $g'(0)=\dfrac{-1-0}{0-(-1)}=-1$
- $g'(-1)=0$

02.5

2) كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T) :

$y=g'(0)(x-0)+g(0)=-x-1$ $\qquad$ $(T):y=-x-1$

01

3) جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	-1 ↗	$e^{-1}-1$	↘ $-\infty$

01.5

4) **جدول إشارة الدالة g:** <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$g(x)$</td><td>$-$</td></tr></table>	0.5
5) **تعيين الأعداد الحقيقية b,a و c:** • لدينا : $g(0)=-1$ يعني $(a\times 0+b)e^{0}+c=0$ ومنه $b+c=-1$ $\quad(1)...$ • ولدينا : $g'(x)=ae^{x}+(ax+b)e^{x}=(ax+a+b)e^{x}$ $g'(-1)=0$ يعني $(a\times(-1)+a+b)e^{-1}=0$ أي $(-a+a+b)e^{-1}=0$ ومنه $be^{-1}=0$ وبالتالي $b=0$ • من أجل $b=0$ بالتعويض في (1) نجد : $c=-1$ • ولدينا كذلك : $g'(0)=-1$ أي $(a\times 0+a+b)e^{0}=-1$ ومنه $(a+0)\times 1=-1$ وبالتالي $a=-1$ إذن $g(x)=-xe^{x}-1$	02.5